数理解析研究所講究録
443巻 1981年 256-264

Two remarks on Stability conjecturs.

北大 理　三波 篤郎

§. 1 Introduction.

ここでは，S.Smale の構造安定性予想及び Ω−安定性予想に関連した2つの結果を述べる。

M を n 次元 closed smooth riemannian manifold, $\mathrm{Diff}^1(M)$ を M 上の C^1-diffeomorphism 全体で，C^1-topology が与えられているものとする。

<u>構造安定性予想[4]</u>　$f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ が構造安定 $\Longleftrightarrow$ f は Axiom A と Strong transversality condition をみたす.

<u>Ω−安定性予想[8]</u>　$f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ が Ω−安定 $\Longleftrightarrow$ f は Axiom A と No cycle property をみたす.

<u>Remark.</u>　これらの予想は f が C^r-diffeo. $(r \geq 2)$ の場合でも，もちろん意味を持ち，実際，そのような形で予想されているが，ここでは C^1-stability，すなわち，C^1-perturbation に関する stability のみを考える。それは主に，C^2-closing lemma が未解決であるという理由による。

さて，次のようなC^1-diffeo. のあるclassを考える．

$$F(M) = \mathrm{int}_1 \{ f \in \mathrm{Diff}^1(M) \mid f\text{の周期点はhyperbolic} \}.$$

ここで，int_1 は，C^1-topologyに関するinterior を表わす．
Mañé は [3] において，次の事を予想している。

<u>(1.1) Conjecture.</u>　$f \in F(M) \underset{?}{\Longrightarrow} \Omega(f)$ はhyperbolic set.

実は，この予想が正しいなら，構造安定性及びΩ－安定性予想がともに成立する事がわかっている [3]。

$f \in F(M)$ は，その周期点が全てhyperbolicであるから，
$0 \leq i \leq \dim M$ に対して，

$$\Lambda_i(f) = \text{closure}\{ p \in \mathrm{Per}(f) \mid E^s_p(f)\text{の次元} = i \}.$$

ときめる。　ここで，$E^s_p(f)$ は p の hyperbolicity に対応した，T_pM の stable subspace である。

このF(M)について，次のMañé の結果が重要である。

<u>(1.2) Theorem [2].</u>　$f \in F(M)$ に対し，$c > 0$ と $0 < \lambda < 1$ が存在して，次の (i)，(ii) をみたす．

(i)　f の C^1-neighborhood $\mathcal{U}$ が存在し，

$$\| Tg^{\pi(p)} \mid E^s_p(g) \| \leq c\lambda^{\pi(p)}$$
$$\| Tg^{-\pi(p)} \mid E^u_p(g) \| \leq c\lambda^{\pi(p)}$$

for all $g \in \mathcal{U}$ and $p \in \mathrm{Per}(g)$.　ここで，$\pi(p)$ は p の周期を表わす．また，$E^s_p(g)$，$E^u_p(g)$ は p の hyperbolicity に対応した T_pM のそれぞれ，stable，unstable subspace である．

(ii) それぞれの $0<i<\dim M$ に対して，Tf-invariant continuous splitting $TM|\Lambda_i(f)=E_i^s\oplus E_i^u$ が存在し，

$$\|Tf^n|E_{i,p}^s\|\cdot\|Tf^{-n}|E_{i,f^n(p)}^u\|\leq c\lambda^n,$$

for all $n\in\mathbb{Z}_+$ and $p\in\Lambda_i(f)$．ここで，$E_{i,p}^s$ は p 上の fiber を表わす．さらに $p\in\Lambda_i(f)\cap Per(f)$ なら，

$E_{i,p}^s=E_p^s(f)$，$E_{i,p}^u=E_p^u(f)$ となる．

(1.1) Conj. は $\dim M=2$ の時，成立する [1], [6]．従って，stability Conjectures は，2次元の時は正しい。さらに Liao は $\dim M=2$ の時，次を証明している。

Theorem [1]，$f\in F(M)\iff f$ は Ω-stable．

3次元以上では，(1.1) Conj. は未解決であり，(1.2) Theorem. 以外には，目立った結果はないようである．

以下，§.2では $\dim M=3$ の場合に，$f\in F(M)$ に対する，$\Omega(f)$ の hyperbolicity にどこまでせまれるかについて考える．§.3では，stable な diffeomorphism の product と，stability conjectures との，ある興味深い関連について述べる。

§．2　3次元の場合

このセクションでは，$\dim M=3$ とする。$f\in F(M)$ に対しては，$\Omega(f)=\overline{Per(f)}$ が成立するから [3]，

$$\Omega(f) = \Lambda_0(f) \cup \Lambda_1(f) \cup \Lambda_2(f) \cup \Lambda_3(f)$$

となる。 $\Lambda_0(f)$, $\Lambda_3(f)$ はそれぞれ, source, sink の全体であり, 有限集合であるので [5], $\Lambda_1(f)$, $\Lambda_2(f)$ が問題となる。 しかし, 2次元の場合とは異なり, これらが hyperbolic set であるかどうかという以前に, "$\Lambda_1(f) \cap \Lambda_2(f) = \phi$?" という問題が生じる。 以下, このセクションでは

$\Lambda = \Lambda_1(f) \cap \Lambda_2(f) \neq \phi$ と仮定して, Λ について考える。 (1.2) Theorem (ii) より, $TM|\Lambda$ は 2通りの splitting

$E_1^s \oplus E_1^u$, $E_2^s \oplus E_2^u$ を持つ.

(1.2) Theorem (ii) を使うと, $E_1^s \subset E_2^s$, $E_1^u \supset E_2^u$

がわかる。 従って, $E = E_2^s \cap E_1^u$ とすると, E は $TM|\Lambda$ の 1次元 sub bundle であり,

$$TM|\Lambda = E_1^s \oplus E \oplus E_2^u$$

という, Tf-invariant な 1次元 sub bundle への分解が得られる. これと, (1.2) Theorem (ii) を使うと, [1] と同様の方法によって, 次の結果が得られる。

<u>Theorem.</u> $\exists d > 0$, $0 < \exists \mu < 1$ such that

$$\| Tf^n \mid E_{1,p}^s \| \leq d \cdot \mu^n$$

$$\| Tf^{-n} \mid E_{2,p}^u \| \leq d \cdot \mu^n$$

for all $n \in \mathbb{Z}_+$, and $p \in \Lambda$.

もし$\Omega(f)$がhyperbolic setになるなら，$\Lambda=\phi$でなければならないが，Lorenz attractorなどの存在を考えると，$\Lambda\neq\phi$という可能性もありそうである。その場合，E上でのTfのふるまいが，Λの性質を規定する事になるのではないだろうか。

§.3 Product of stable diffeomorphisms.

構造安定性及びΩ－安定性に関して，次のnaturalな問題が考えられる。

Question. $f, g \in \mathrm{Diff}^1(M)$がともに構造安定(resp. Ω－安定)の時，$f\times g : M\times M \longrightarrow M\times M$は構造安定(resp. Ω－安定)であろうか？

ここで，$f\times g\,(x, y) = (f(x), g(y))$である。このセクションでは，この問題が実は，構造安定性予想(resp. Ω－安定性予想)と同値になる事を示す。正確に述べると，

Theorem [7]　次の(a), (b), (c)は同値である。

(a) 構造安定性予想(resp. Ω－安定性予想)は正しい。

(b) $f, g \in \mathrm{Diff}^1(M)$がともに構造安定(resp. Ω－安定)ならば，$f\times g$も構造安定(resp. Ω－安定)である。

(c) $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$が構造安定(resp. Ω－安定)ならば$f\times f^{-1} \in \mathcal{F}(M\times M)$．

<u>証明.</u>　ここでは，Ω-stability statement のみを示すが，構造安定性の場合も同様である．

<u>(a) $\Longrightarrow$ (b)</u>　f と g がともに Ω-stable とすると，(a) より，f, g はともに Axiom A と No cycle property をみたす。Axiom A と No cycle property に関する基本的な性質を使った，straightforward な議論によって，$f \times g$ も Axiom A と No cycle property をみたすことがわかる．そうすると [8] より，$f \times g$ は Ω-stable である。

<u>(b) $\Rightarrow$ (c)</u>　f が Ω-stable なら f^{-1} もそうである．故に (b) より $f \times f^{-1}$ は Ω-stable である。Kupka-Smale の定理より，$f \times f^{-1} \in \mathcal{F}(M \times M)$ がわかる．

<u>(c) $\Longrightarrow$ (a)</u>，　これが Main part である．

Ω-stable な $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ に対して，$\Omega(f)$ が hyperbolic set である事を言えば，Ω-stability conjecture は成立する [3]。そのためには，$0 < i < \dim M$ に対して $\Lambda_i(f)$ が hyperbolic set になる事を示せばよい [2]。以下，$\Lambda_i(f)$ を fix し，Λ_i とかく。

(c) より $f \times f^{-1} \in \mathcal{F}(M \times M)$ であるから，$0 \leq j \leq 2n$ に対して $\Lambda_j(f \times f^{-1})$ が定義でき，(1.2) Theorem (ii) より，$0 < j < 2n$ に対して，$T(f \times f^{-1})$-invariant な continuos splitting

$$T(M\times M)\,|\,\Lambda_j(f\times f^{-1}) = \tilde{E}^s_j \oplus \tilde{E}^u_j$$

が存在し，(1.2) Theorem (ii) の norm に関する式が成立している。

次の事が，簡単にわかる。

$$(3.1)\quad \Lambda_j(f\times f^{-1}) = \bigcup_{k+\ell=j} \Lambda_k(f)\times\Lambda_\ell(f^{-1}) = \bigcup_{k+\ell=j} \Lambda_k(f)\times\Lambda_{n-\ell}(f)$$

(3.2) $(p,q)\in\Lambda_k(f)\times\Lambda_{n-\ell}(f)$ のとき

$$\tilde{E}^s_{j,(p,q)} = E^s_{k,p}\oplus E^u_{n-\ell,q}$$
$$\tilde{E}^u_{j,(p,q)} = E^u_{k,p}\oplus E^s_{n-\ell,q} .$$

以上から，特に

$$\Lambda_n(f\times f^{-1}) \supset \Lambda_i(f)\times\Lambda_i(f) \quad 0\le{}^{\forall}i\le n.$$

が成立している。(1.2) Theorem (ii) より，

$$\|T(f\times f^{-1})^n\,|\,\tilde{E}^s_{n,(p,q)}\|\cdot\|T(f\times f^{-1})^{-n}\,|\,\tilde{E}^u_{n,(f\times f^{-1})^n(p,q)}\| \le c\cdot\lambda^n$$

for all $(p,q)\in\Lambda_i\times\Lambda_i$ and $n\in\mathbb{Z}_+$.

明らかに，

$$\|T(f\times f^{-1})^n\,|\,\tilde{E}^s_{n,(p,q)}\| \ge \|Tf^n\,|\,E^s_{i,p}\|$$
$$\|T(f\times f^{-1})^{-n}\,|\,\tilde{E}^u_{n,(f\times f^{-1})^n(p,q)}\| \ge \|Tf^n\,|\,E^s_{i,f^{-n}(q)}\|.$$

特に $q=f^n(p)$ とすると，以上から，

$$\|Tf^n\,|\,E^s_{i,p}\|^2 \le c\lambda^n .$$

これより，

$$\|Tf^n\,|\,E^s_{i,p}\| \le \sqrt{c}\cdot(\sqrt{\lambda})^n$$

同様にして,

$$\| Tf^{-n} \mid E^{u}_{i,p} \| \leq \sqrt{c} \cdot (\sqrt{\lambda})^{n} .$$

これは, 任意の $n \in \mathbb{Z}_+$ と $p \in \Lambda_i$ について成立しているから, $\Lambda_i(f)$ は hyperbolic set である. q.e.d.

— References. —

[1] S. D. Liao, On the stability conjecture, Chin. Ann. of Math. 1(1980), 9–29.

[2] R. Mañé, Expansive diffeomorphisms, Dynamical systems, Warwick. LNM. 468.

[3] ______, Contributions to the stability conjecture, Topology 17(1978), 383–396.

[4] J. Palis, S. Smale, Structural stability theorems, Global Analysis, AMS. (1970).

[5] V. A. Pliss, A hypothesis due to Smale, Diff. Eq. 8(1972), 203–214.

[6] A. Sannami, The stability theorems for discrete dynamical systems on two-dimensional manifolds, (to appea in Proc. Japan Acad.)

[7] A. Sannami, On product of stable diffeomorphisms, (preprint)

[8] S. Smale, The Ω-stability theorem, Proc. Sympo. Pure Math. (Global Analysis), XIV, AMS. (1970), 289-297.